

Un modelo microeconómico estocástico del comportamiento de una jefa de familia como único participante en el ingreso familiar: el caso mexicano, 2005-2016*

A Stochastic Microeconomic Model of Mother's Behavior
as the Only Participant in the Family Income: The Mexican Case, 2005-2016

Rosa María Domínguez-Gijón **, Francisco Venegas-Martínez***,
y Reyna Susana García-Ruiz****

RESUMEN

Objetivo: Este artículo desarrolla un modelo microeconómico estocástico útil para explicar el comportamiento de una madre cuando es el único participante en el ingreso familiar. *Metodología:* Se propone un modelo en el que la jefa de familia tiene un consumo de subsistencia sujeto a dos restricciones, la primera considera un ingreso incierto junto con depósitos en cajas de ahorro cuando hay un excedente, y la segunda consiste de su hábito (rutina) de consumo. *Alcance:* A través del modelo propuesto se determinan la proporción óptima del ingreso que la jefa de familia destina al ahorro cuando hay un excedente, las horas que destinará a su actividad laboral y la estrategia óptima de consumo futuro. *Resultados:* A través de un modelo VAR se muestra evidencia empírica, para el caso mexicano, que confirma los resultados de la propuesta teórica utilizando datos de consumo, salarios y el número de madres solteras, entre otras variables, durante 2005-2016. Para ello se examinan la causalidad de Granger mediante el procedimiento de Toda-Yamamoto y se analizan las funciones de impulso-respuesta. Se estudia también el efecto de la estabilidad de la tasa de interés sobre el consumo de las jefas de familia en el periodo 2009-2017. *Conclusiones:* El concepto de formación de hábitos juega un papel fundamental en la toma de decisiones de la jefa de familia ya que su consumo pasado sí influye en su consumo futuro.

Palabras clave: Programación dinámica, formación de hábito, decisiones de inversión, causalidad.

Clasificación JEL: C61, D11, G11, C32.

ABSTRACT

Objective: This paper is aimed at developing a stochastic microeconomic model useful to explain the behavior of a mother as the only participant in family spending. *Methodology:* In the proposed model, the mother has subsistence consumption subject to two constraints, the first one considers an uncertain income joint with savings deposits when there is a surplus, and the second one consists of her consumption habit (or routine). *Scope:* Through the proposed model, we determine the optimal proportion of income allocated to savings if the mother has a surplus, the hours devoted to labor, and the optimal strategy for future consumption. *Results:* Through a VAR model, it is shown empirical evidence, for the Mexican case, which confirms the results of the theoretical proposal by using data from consumption, wages, and the total number the single mothers, among other relevant variables, from 2005 to 2016. To do this, we examine Granger causality by means of the Toda-Yamamoto procedure and analyse impulse-response functions. We also study the effect of the interest rate stability on the consumption of the head of the family during the period 2009-2017. *Conclusions:* The concept of habit formation plays a fundamental role in the decision making of the mother as head of the family since her past consumption does influence her future consumption.

Keywords: Dynamic programming, habit formation, investments decisions, causality.

JEL Classification: C61, D11, G11, C32.

* Fecha de recepción: 14/09/2015. Fecha de aceptación: 09/05/2018.

** Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Correo: rossedominguez13@gmail.com. ORCID: 0000-0002-2245-8018.

*** Instituto Politécnico Nacional. Correo: fvenegas1111@yahoo.com.mx. ORCID: 0000-0003-1157-0298.

**** Universidad Cristóbal Colón. Correo: grreinas@yahoo.com.mx. ORCID: 0000-0001-8677-0169.

INTRODUCCIÓN

La participación en el ingreso de las familias mexicanas al interior del hogar se ha modificado en las últimas décadas. Tradicionalmente en la mujer recaía la crianza de los hijos y las tareas asociadas a las labores domésticas, pero en la actualidad ésta se ha incorporado al mercado laboral, cada vez, con mayor concurrencia, como se muestra en los trabajos de: Oliveira y García (1990), Oliveira y Ariza (2001), Blanco (2002) y García y Rojas (2002).

De acuerdo con la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE) en México, en el cuarto trimestre de 2016 la tasa de participación económica de mujeres de 15 y más años es de 43.4 por ciento de las cuales el 43.3 por ciento son madres o jefas de familia (con al menos un hijo vivo) que combina su actividad desempeñando una doble jornada de trabajo pues son las proveedoras principales o únicas participantes del ingreso y además tienen que estar al cuidado de sus hijos por lo que deben decidir cuánto tiempo dedicar a cada actividad. Las mujeres de bajos recursos y que ejercen su maternidad estando solteras, separadas o divorciadas se colocan en un contexto de alta vulnerabilidad con un notable crecimiento de hogares monoparentales con jefatura femenina. Lo anterior motiva esta investigación, la cual tiene como objetivo principal el desarrollar un modelo estocástico útil para determinar las horas que la jefa de familia estaría dispuesta a trabajar para incrementar su riqueza (ingreso laboral y ahorro cuando este último es posible) y determinar su regla de consumo óptimo, así como contrastar los resultados de la propuesta teórica con la evidencia empírica. En el modelo teórico propuesto se describe y explica el comportamiento de una madre que toma decisiones sobre la cantidad de horas que dedicará tanto a la actividad laboral como al cuidado de su(s) hijo(s). El ingreso derivado de dichas decisiones cubrirá el consumo de subsistencia de toda la familia. Para tal efecto se emplea el concepto de consumo de subsistencia introducido por Constantinides (1990) en el que se plantea la noción de formación de hábitos del consumo (o rutina de consumo). Dicha noción se utilizará en el modelado del comportamiento de esta agente. Otros estudios que trabajan la noción de formación de hábitos se encuentran en Hicks (1965), Pollak (1970), Ryder y Heal (1973), Sundaresan (1989), Cox y Huang (1989), Abel Andrew (1990), Detemple y Zapatero (1991), Chapman (1998), Campbell y Cochrane (1999), Zheng y Xu (2003) y Márquez (2006), entre muchos otros.

En este trabajo se plantea el problema del ingreso incierto de una jefa de familia. En este contexto es importante destacar que las decisiones óptimas de consumo desarrolladas por Merton (1969, 1971), Hall (1978, 1988) y Hey y Valentinno (1988) quedan inmersas en el modelo de Constantinides en el que un agente

racional maximiza su utilidad esperada cuando existen factores de riesgo. Otras extensiones que consideran ambientes inciertos para tomadores de decisiones se encuentran en Miller (1974), Hansen y Singleton (1983), Breeden (1986) y Bodie y Detemple (2004).

Esta investigación se encuentra organizada de la siguiente manera: en la sección I se desarrolla un modelo estocástico que plantea el problema de una jefa de familia que tiene un consumo de subsistencia sujeto a un ingreso incierto que sigue un movimiento geométrico browniano. Dicho problema de decisión se resuelve a través de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. El modelo determina la proporción óptima de la riqueza que se destina al ahorro cuando esto es posible, la regla de consumo óptimo, y las horas que destinará tanto a su actividad laboral como a la crianza de sus hijos.

Así mismo, a través de un análisis de Vectores Autorregresivos se revisa la evidencia empírica existente para validar los resultados teóricos del modelo propuesto. Para ello se utilizan datos de INEGI, BANXICO y ENOE durante el periodo 2005-2016. Los hallazgos evidencian que tanto el número de jefas de familia como el salario son estadísticamente significativos con los signos esperados. Además, el número de jefas de familia y la tasa de interés causan en el sentido de Granger al salario, así como el salario causa en el sentido de Granger al número de jefas de familia, este efecto es más notorio cuando se estabilizaron las tasas de interés (entre 2009 y 2017). La última sección presenta las conclusiones, haciendo observaciones sobre las ventajas y limitaciones del modelo teórico propuesto y la metodología econométrica empleada.

I. EL MODELO ESTOCÁSTICO DE LA MADRE

El modelo propuesto extiende el trabajo de Constantinides (1990) al incorporar la posibilidad de que la jefa de familia realice un ahorro cuando hay un excedente para suavizar su patrón de consumo (por la incertidumbre del mismo) y determinar cuántas horas está dispuesta a trabajar para incrementar su riqueza (ingreso laboral y ahorro con intereses), con el afán de maximizar su utilidad total esperada, junto con la de su descendencia. En este caso, el supuesto de vida infinita debe entenderse como una madre que está interesada no sólo en maximizar su utilidad, sino también la de las generaciones venideras.

Se considera a una madre que tiene una riqueza, W_t , en el momento denominada en unidades de bienes de consumo. La madre tiene acceso a un activo (ahorro), A_t , que paga una tasa de interés libre de riesgo, r , ésta se supone continuamente capitalizable y constante para todos los plazos. Así, la dinámica de los flujos depositados satisface

$$\frac{dA_t}{A_t} = rdt \quad (1)$$

si hay un excedente del gasto en consumo; en caso contrario $A_t=0$. El salario, ϑ_t , se supone conducido por un movimiento geométrico browniano, donde μ es la tasa de crecimiento media anualizada del salario incierto, σ es la desviación estándar anualizada (volatilidad anualizada) de la tasa de crecimiento del salario y V_t es un movimiento browniano (una variable aleatoria normal con media cero y varianza proporcional al tiempo). De esta manera, la ecuación diferencial estocástica que conduce al salario ϑ_t está dada por:

$$\frac{d\vartheta_t}{\vartheta_t} = \mu dt + \sigma dV_t \quad (2)$$

1.1. Problema de la madre

El problema de decisión que la madre desea resolver se plantea a continuación. La acumulación de la riqueza, W_t , en términos de los depósitos (ahorro), el ingreso y el consumo están dados por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dW_t = W_t(1-\phi_t)dR_A + W_t\phi_t dR_\vartheta - c_t dt + T_t \\ W_t\phi_t = l_t \vartheta_t \\ g_t = 1 - l_t \end{cases} \quad (3)$$

donde c_t es el consumo en el tiempo t , T_t es un subsidio (seguros de vida para jefas de familia que otorga el gobierno a las madres de bajos recursos), y $dR_\vartheta = d\vartheta_t/\vartheta_t$ es la tasa de crecimiento del salario. De esta forma, la madre cuenta con $l_t + g_t = 1$ (son proporciones del total del tiempo equivalente a una unidad de tiempo, por ejemplo, un día), donde l_t son las horas que decide trabajar para obtener un ingreso real, $l_t \vartheta_t$, y, por último, g_t es el tiempo restante, el cual dedicará al cuidado de sus hijos y/o familia. En este caso $W_t\phi_t$ es la proporción de su riqueza que proviene de su ingreso incierto; este concepto utilizado en Merton (1969, 1971). La proporción restante de su riqueza, $W_t(1-\phi_t)$, la deposita en cajas de ahorro sólo cuando hay un excedente. En la ecuación (3), la riqueza marginal del individuo es reducida por el consumo por unidad de tiempo $c_t dt$. El objetivo de esta investigación es determinar las horas que una jefa de familia racional está dispuesta a trabajar para incrementar su riqueza y determinar su regla de consumo óptimo bajo el criterio de que

su utilidad total esperada sea máxima. Ahora bien, si se sustituyen las expresiones (1) y (2) en la ecuación diferencial estocástica (3) se tiene que:

$$dW = W_t \left[r + (\mu - r)\phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right] dt - T\phi_t \sigma dV_t \quad (4)$$

donde $0 \leq \phi_t \leq 1$ y $W_t \geq 0$. El nivel de formación del hábito a está dado por

$$\gamma_t \equiv e^{-a} \int_0^t \gamma_0 + b \int_0^t e^{a(s-t)} c_s ds$$

donde c_t denota el consumo individual al tiempo t , γ_0 el consumo individual inicial de subsistencia y a , b , son constantes, cuanto mayor sea el valor de a , menor será el peso del consumo pasado. El parámetro b mide la fuerza de la formación de hábitos. Así mismo, este agente sigue un proceso recursivo de formación de hábitos de consumo γ_t , donde el consumo de subsistencia depende de consumos anteriores (ver apéndice A), esto es:

$$d\gamma_t = bc_t - a\gamma_t. \quad (5)$$

En este caso, el consumo debe ser mayor al hábito $c_t \geq \gamma_t$, no puede haber un consumo cero y la riqueza debe ser mayor que cero $W_t \geq 0$. El problema de decisión que maximiza la utilidad total esperada y descontada sobre consumo se define como:

$$\text{Maximizar}_{c_t} \quad E_0 \left\{ \int_0^{\infty} u(c_t, \gamma_t) e^{-\rho s} ds \mid F_0 \right\} \quad (6)$$

sujeto a

$$dW = W_t \left[r + (\mu - r)\phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right] dt - Y\phi_t \sigma dV_t$$

y

$$\gamma_t \equiv e^{-a} \int_0^t \gamma_0 + b \int_0^t e^{a(s-t)} c_s ds$$

En particular se toma $u(c_t, \gamma_t) = \frac{(c_t - \gamma_t)^\alpha}{\alpha}$ como la función de utilidad por el consumo y la rutina de hábito. Una cantidad relevante en este trabajo es el consumo de subsistencia, $c_t - \gamma_t$, el cual, por definición, está relacionado con el consumo pasado. El parámetro $\alpha \neq 0$ está relacionado con la aversión al riesgo, γ_t representa el nivel de hábito del bien, \mathcal{F}_t es la información disponible al tiempo t y ρ es la tasa subjetiva de descuento, lo que modela la ansiedad del agente por consumo presente.¹

1.2. La Ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

La solución óptima del problema de maximización de utilidad de la madre (6) sujeto a las restricciones presupuestales (4) y (5) se obtiene mediante programación dinámica estocástica en tiempo continuo. Para ello se define la siguiente función de valor:

$$J(W_t, \gamma_t, t) = \max_{c_s, \phi_s} E \left[\int_t^\infty \frac{(c_s - \gamma_s)^\alpha}{\alpha} e^{-\rho s} ds \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (7)$$

Se separa ahora el intervalo de integración de (7), lo cual conduce a la relación de recursividad temporal sobre la funcional J , de tal forma que

$$J(W_t, \gamma_t, t) = \max_{c_s, \phi_s} E \left[\int_t^{t+dt} \frac{(c_s - \gamma_s)^\alpha}{\alpha} e^{-\rho s} ds + \int_{t+dt}^\infty \frac{(c_s - \gamma_s)^\alpha}{\alpha} e^{-\rho s} ds \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (8)$$

Se aplica al primer término de la expresión anterior el teorema de valor medio del cálculo integral y el segundo término es derivado según la regla de Itô². Se hace notar que la restricción está planteada por el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (véase el apéndice B) dadas por:

$$\begin{cases} dW_t = W_t \left[r + (\mu - r)\phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right] dt - Y_t \phi_t \sigma dV_t \\ d\gamma_t = (bc_t - a\gamma_t) + 0 \end{cases} \quad (9)$$

¹ En otras palabras, entre mayor sea ρ , más ansioso estará el agente por consumir en el presente.

² Véanse, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008) y Venegas-Martínez y González-Aréchiga (2000).

Así, la ecuación (8) se transforma en

$$0 = \max_{c_t, \phi_t} E \left\{ \frac{(c_t - \gamma_t)^\alpha}{\alpha} e^{-\rho t} dt + o(dt) + \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial W_t} \left(r + (\mu - r) \phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial W_t^2} W_t^2 \sigma^2 \phi_t^2 + \frac{\partial J}{\partial \gamma_t} (bc_t - a\gamma_t) \right] dt + \frac{\partial J}{\partial W_t} \gamma_t \phi_t \sigma dV_t \mid \mathcal{F}_t \right\} \quad (10)$$

A continuación, se toman valores esperados en todos los términos de la ecuación anterior, se divide entre $o(dt)/dt$ y se toma el límite recordando que $o(dt)/dt \rightarrow 0$, así

$$0 = \max_{c_t, \phi_t} \left[\frac{(c_t - \gamma_t)^\alpha}{\alpha} e^{-\rho t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial W_t} \left(r + (\mu - r) \phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial W_t^2} W_t^2 \sigma^2 \phi_t^2 + \frac{\partial J}{\partial \gamma_t} (bc_t - a\gamma_t) \right]. \quad (11)$$

Si c_t y ϕ_t son óptimos, entonces se obtiene la ecuación diferencial parcial (determinista) de segundo orden en J dada por:

$$0 = \frac{(c_t - \gamma_t)^\alpha}{\alpha} e^{-\rho t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial W_t} \left(r + (\mu - r) \phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial W_t^2} W_t^2 \sigma^2 \phi_t^2 + \frac{\partial J}{\partial \gamma_t} (bc_t - a\gamma_t) \quad (12)$$

Se propone como candidato de solución de la ecuación diferencial parcial anterior a $J(W_t, \gamma_t, t) = V(W_t, \gamma_t) e^{-\rho t}$. Al sustituir las derivadas correspondientes del candidato a solución en la ecuación (12) se tiene que:

$$0 = \frac{(c_t - \gamma_t)^\alpha}{\alpha} - \rho V(W_t, \gamma_t) + V'(W_t) W_t \left(r + (\mu - r) \phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right) + \frac{1}{2} V''(W_t) W_t^2 \sigma^2 \phi_t^2 + V'(\gamma_t) (bc_t - a\gamma_t) \quad (13)$$

Si ahora se supone, en consistencia con la forma funcional del índice de satisfacción $V(W_t, \gamma_t) e^{-\rho t} = \beta_1 \frac{(W_t - \beta_0 \gamma_t)^\alpha}{\alpha}$, la ecuación (13) se transforma en

$$0 = \frac{(c_t - \gamma_t)^\alpha}{\alpha} - \rho\beta_1 \frac{(W_t - \beta_0\gamma_t)^\alpha}{\alpha} + \beta_1 (W_t - \beta_0\gamma_t)^{\alpha-1} W_t \left(r + (\mu - r)\phi_t + T - \frac{c_t}{W_t} \right) + \frac{1}{2}\beta_1(\alpha-1)(W_t - \beta_0\gamma_t)^{\alpha-2} W_t^2 \sigma^2 \phi_t^2 - \beta_0\beta_1 (W_t - \beta_0\gamma_t)^{\alpha-1} (bc_t - a\gamma_t). \quad (14)$$

Si se deriva (14) con respecto a las variables de control c_t y ϕ_t , se tiene que:

$$c_t^* = \beta_1^{\frac{1}{\alpha-1}} (W_t - \beta_0\gamma_t) \left(1 + b\beta_0 \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + \gamma_t, \quad (15)$$

$$\text{y } \phi_t^* = \frac{(\mu - r)}{\sigma_t^2 (1 - \alpha)} \frac{1}{W_t} (W_t - \beta_0\gamma_t), \quad (16)$$

donde $0 < \alpha < 1$. Ahora bien, si se sustituyen los valores de β_0 y β_1 (véase apéndice C) en las ecuaciones (15) y (16), respectivamente, se tiene que el consumo óptimo está dado por:

$$c_t^* = \gamma_t + h \left(W_t - \frac{\gamma_t}{r + a - b} \right), \quad (17)$$

donde h es una constante. Este resultado muestra la trayectoria de consumo óptimo que la madre tendrá en el futuro y que satisface sus necesidades básicas de sobrevivencia. Es decir, el consumo de la madre tiene que ser por lo menos γ_t y la riqueza W_t tiene que exceder un umbral que depende de los parámetros que determinan la formación de hábitos. Es importante mencionar que la cantidad

$$h = (\beta_1 (1 + b\beta_0))^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left[\left(\frac{1}{(1 - \alpha)(r + a - b) - \alpha} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{b}{r + a - b} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

es constante en el tiempo y representa la propensión marginal al consumo después del consumo de subsistencia. En lo que sigue se supondrá que la tasa de interés es mayor a $a - b$. Es decir, el pago por intereses supera el peso del consumo pasado sobre la fuerza de la formación de hábitos. De esta manera, la cantidad

$$\phi_t^* = m \left(1 - \frac{\frac{\gamma_t}{W_t}}{r + a - b} \right), \quad (18)$$

representa la proporción óptima del salario incierto que asegura que la madre siga haciendo depósitos en cajas de ahorro. La cantidad

$$m = \frac{(\mu - r)}{(1 - \alpha)} \frac{1}{\sigma_t^2}$$

es el premio al riesgo de mercado ajustado por varianza y la aversión al riesgo. A continuación se obtiene, al sustituir las proporciones óptimas en (3), el proceso estocástico que genera la riqueza real, a saber:

$$\begin{aligned} dW_t &= W_t \left[r + (\mu - r) \phi_t^* + T - \frac{c_t^*}{W_t} \right] dt - W_t \phi_t^* \sigma dV_t \\ l_t &= \frac{W_t \phi_t^*}{\mathcal{G}_t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Si se retoma que $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma V_t}$, entonces

$$l_t = \mathcal{G}_0 e^{-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma V_t} \left(1 - \frac{\gamma_t}{W_t} \right) \left(W_0 + \int_0^t W_s \left[r + (\mu - r) \phi_s^* + T - \frac{c_s^*}{W_s} \right] ds - \int_0^t W_s \phi_s^* \sigma dV_s \right) \quad (20)$$

donde l_t refleja las horas que la madre debe trabajar para mantener su consumo de subsistencia. Así mismo, se obtienen que las horas que destinará al cuidado de su familia están dadas por $g_t = 1 - l_t$, de tal manera que

$$g_t = 1 - \left[\mathcal{G}_0 e^{-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma V_t} \left(1 - \frac{\gamma_t}{W_t} \right) \left(W_0 + \int_0^t W_s \left[r + (\mu - r) \phi_s^* + T - \frac{c_s^*}{W_s} \right] ds - \int_0^t W_s \phi_s^* \sigma dV_s \right) \right] \quad (21)$$

Este modelo permite determinar las horas trabajadas por la madre a cambio de un salario que satisface al menos su consumo mínimo y que le permite destinar tiempo al cuidado de sus hijos. Si después de haber solventado su consumo de subsistencia existiera un sobrante, lo ahorrará en alguna institución financiera.

II. EVIDENCIA EMPÍRICA SOBRE EL MODELO DE LA MADRE MEXICANA

A continuación se revisa la evidencia empírica existente sobre los resultados del modelo teórico propuesto. Para ello se consideran variables como: el gasto en el consumo promedio de los productos de la canasta básica (SER_CP); el salario mínimo que gana una madre o jefa de familia (SER_W); la tasa de interés nominal que se paga por realizar depósitos en cajas de ahorro (SER_R); y el número total de jefas de familia mexicanas (SER_JF), todas estas series mensuales son analizadas a lo largo del periodo 2009-2016.

Para el análisis empírico se realizan pruebas KPSS de raíces unitarias, las cuales arrojan órdenes de integración $I(0)$ e $I(1)$,³ lo que conduce al uso de la metodología de Toda–Yamamoto para especificar un modelo VAR y, posteriormente, realizar pruebas de causalidad en el sentido de Granger. A continuación, en los cuadros 1 y 2, se muestran las pruebas de raíz unitaria en niveles y diferencias, respectivamente.

Cuadro 1. Pruebas KPSS a las series en niveles.

Prueba estadística Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)	Exógeno: constante y tendencia lineal	
Ancho de banda: 6 (Newey - West) usando el Kernel de Bartlett	90 Obs.	Estadístico LM
H ₀ : SER_CP es estacionaria	No estacionaria	0.170869
H ₀ : SER_JF es estacionaria	Estacionaria	.0906009
H ₀ : SER_R es estacionaria	No estacionaria	0.204109
H ₀ : SER_W es estacionaria	Estacionaria	0.048560
	1%	0.216
Valores críticos asintóticos:	5%	0.146
	10%	0.119

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). *EViews* 9.

Cuadro 2. Pruebas KPSS de las series diferenciadas.

Prueba estadística Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)	Exógeno: constante y tendencia lineal	
Ancho de banda:25(Newey - West) usando el Kernel de Bartlett	90 Obs.	Estadístico lm
H ₀ : ser_dcp es estacionaria	Estacionaria	0.197765
H ₀ : ser_dr es estacionaria	Estacionaria	0.754638
	1%	0.739
Valores críticos asintóticos:	5%	0.463
	10%	0.347

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). *EViews* 9.

³ Es importante destacar que las series diferenciadas sólo se usaron para la prueba KPSS, sus nombres son precedidos por "SER_D" para diferenciarlas de las series originales.

El siguiente paso de la metodología de Toda–Yamamoto (T-Y) es determinar el número correcto de rezagos para un sistema VAR en niveles (la corrección de valores asintóticos es posterior). El cálculo de los rezagos óptimos se muestra en el cuadro 3.

Cuadro 3. Selección de rezagos óptimos.

Selección del rezago óptimo del modelo VAR						
Variables endógenas: SER_CP SER_JF SER_R SER_W				Muestra:2005M01 2016M12		
Variables exógenas: C				Observaciones incluidas: 90		
Rezago	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-818.4716	NA	6055.842	20.06028	20.17768	20.10742
1	-500.7406	596.7143	3.857764	12.70099	13.28799*	12.93666*
2	-491.0658	17.22581	4.514558	12.85526	13.91187	13.27948
3	-477.9535	22.06714	4.879169	12.92569	14.45191	13.53845
4	-460.0637	28.3618	4.723208	12.8796	14.87542	13.68089
5	-443.4551	24.71041	4.758296	12.86476	15.33018	13.85459
6	-415.2341	39.23402	3.651957	12.56669	15.50171	13.74505
7	-384.5972	39.60376*	2.680130*	12.20969	15.61432	13.57659
8	-366.5538	21.56412	2.721751	12.15985*	16.03408	13.71529

* Indica la elección de rezago según el criterio indicado.

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). *EViews* 9.

En el cuadro anterior se observa que existe la posibilidad de ajustar el modelo con 1, 7 u 8 rezagos. Para elegir el orden apropiado, se hicieron pruebas de correlación serial para el modelo VAR con cada una de las especificaciones. En estas pruebas se obtuvieron los mejores resultados con 1 rezago (en los demás casos se encontraban autocorrelaciones), lo cual se muestra en el cuadro 4.

Cuadro 4. Pruebas de correlación serial para el modelo elegido.

Prueba LM de correlación serial para modelos VAR		
Hipótesis nula: no hay correlación serial		
Muestra: 2009M07 2016M12		Obs: 89
Lags	LM-Stat	Prob
1	18.9389	0.2718
2	18.14301	0.3156

Probs. de distribución chi cuadrada con 16 g de l.

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). *EViews* 9.

Una vez establecido el modelo VAR apropiado, la metodología T-Y conduce a examinar la existencia de cointegración entre las variables del modelo. De existir la cointegración, se refuerza la idea de causalidad (ahora de largo plazo) entre las variables. En el caso particular de este análisis se tienen dos ecuaciones cointegrantes, véase el cuadro 5.

Cuadro 5. Prueba de cointegración asociada al modelo de Toda-Yamamoto.

Muestra ajustada: 2009M10 2016M12		Obs: 87 desp. de ajustes		
Supuesto de tendencia: lineal y tendencia determinista				
Series: ser_cp ser_jf ser_r ser_w				
Prueba de traza para cointegración				
Hipotesizada		Traza	0.05	
No. de Ecs	Eigenvalue	Estadístico	Valor crítico	Prob.**
Ninguna *	0.459079	102.8826	63.8761	0
A lo sumo 1 *	0.256379	49.42266	42.91525	0.0098
A lo sumo 2	0.169415	23.6512	25.87211	0.0922
A lo sumo 3	0.082615	7.50185	12.51798	0.2951
Prueba de cointegración de rango (valor propio máximo)				
Hipotesizada		Traza	0.05	
No. de Ecs	Eigenvalue	Estadístico	Valor crítico	Prob.**
Ninguna *	0.459079	53.45997	32.11832	0
A lo sumo 1	0.256379	25.77145	25.82321	0.0508
A lo sumo 2	0.169415	16.14935	19.38704	0.1389
A lo sumo 3	0.082615	7.50185	12.51798	0.2951

La prueba de rango indica 1 ecuación cointegrantes al 5 por ciento.

* Indica rechazo de la hipótesis al 5 por ciento.

**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values.

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI; STPS; BANXICO; ENOE, (2016).

A continuación se muestra el modelo VAR con los rezagos (1 + 1) de las variables que mostraron una raíz unitaria, el número de rezagos obedece tanto al orden del VAR (1), como al orden de integración de las variables (1). Los coeficientes del modelo se muestran en el cuadro 6.

Cuadro 6. Modelo VAR con corrección de Toda-Yamamoto.

Estimadores del VAR (corrección T- Y)				
Muestra: 2009M09 2016M12		Obs: 88 desp. de ajustes		
Errores estándar () & estadísticos t []				
	SER_JF	SER_W	SER_CP	SER_R
	0.845805	0.293353	-0.116241	-0.053373
SER_JF(-1)	-0.04784	-0.23726	-0.29037	-0.01096
	[17.6793]	[1.23639]	[-0.40031]	[-4.87150]

Cuadro 6. *Continuación.*

Estimadores del VAR (corrección T- Y)				
Muestra: 2009M09 2016M12			Obs: 88 desp. de ajustes	
Errores estándar () & estadísticos t []				
	SER_JF	SER_W	SER_CP	SER_R
SER_W(-1)	0.016531 -0.00621 [2.66066]	0.957245 -0.03081 [31.0664]	0.077943 -0.03771 [2.06691]	0.006483 -0.00142 [4.55657]
SER_CP(-1)	-0.009617 -0.01788 [-0.53790]	0.151578 -0.08866 [1.70956]	0.768141 -0.10851 [7.07889]	-0.002156 -0.00409 [-0.52658]
SER_R(-1)	-1.405775 -0.61766 [-2.27597]	0.200305 -3.06322 [0.06539]	-5.095279 -3.74889 [-1.35914]	1.090455 -0.14145 [7.70914]
SER_CP(-2)	0.012608 -0.01814 [0.69520]	-0.101594 -0.08994 [-1.12955]	-0.011087 -0.11007 [-0.10072]	0.000594 -0.00415 [0.14292]
SER_R(-2)	1.807972 -0.67194 [2.69066]	-1.037484 -3.33244 [-0.31133]	5.590712 -4.07838 [1.37082]	0.05067 -0.15388 [0.32928]
R-squared	0.395987	0.979046	0.771682	0.954733
Adj. R-squared	0.359157	0.977768	0.75776	0.951973
Sum sq. resid	44.83651	1102.784	1651.737	2.351466
S.E. equation	0.73945	3.667231	4.48811	0.169341
F-statistic	10.75174	766.2516	55.42954	345.897
Log likelihood	-95.19678	-236.1099	-253.8854	34.51451
Akaike AIC	2.299927	5.502497	5.906487	-0.648057
Schwarz sc	2.468836	5.671406	6.075396	-0.479148
Mean dependent	43.2184	280.7811	77.43679	4.461818
S.D. dependent	0.923705	24.59506	9.118857	0.772717

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). *EViews* 9.

Con respecto a este modelo VAR se destaca que, según Toda y Yamamoto (1995), la inclusión de los rezagos de las variables con algún orden e integración distinto a cero como variables exógenas corrige el sesgo en los estimadores relacionados y por tanto valida todas las pruebas de hipótesis asociadas al modelo.

En este modelo VAR también se destaca la significancia de la mayor parte de los estimadores (estadísticos t superiores a 1.7) y la alta bondad de ajuste. La significancia del modelo VAR presentado en el cuadro anterior valida el modelo teórico y muestra que el consumo de las madres de familia depende tanto del ingreso como de la tasa de interés y que este consumo es inercial a dos periodos (lo que prueba indirectamente la hipótesis del hábito propuesta en el artículo).

Del mismo modo, el modelo muestra la inercia de la tasa de interés a dos periodos (variable exógena del modelo), lo que sugiere que también el ahorro sigue

esta conducta de formación de hábitos, lo que no es extraño pues el ahorro y el consumo son variables complementarias. A continuación se muestra el análisis de causalidad en el sentido de Granger.

Cuadro 7. Prueba de causalidad en el sentido de Granger con base en la metodología de Toda-Yamamoto (1995).

Causalidad Granger /Pruebas de Wald de exogeneidad			
Muestra: 2009M07 2016M12			Obs: 88
Variable dependiente: SER_JF			
Excluída	Chi-cuad	g de l	Prob.
SER_W	7.079099	1	0.0078*
SER_CP	0.289341	1	0.5906
SER_R	5.180058	1	0.0228*
All	9.305335	3	0.0255
Variable dependiente: SER_W			
Excluída	Chi-cuad	g de l	Prob.
SER_JF	1.528672	1	0.2163
SER_CP	2.922599	1	0.0873*
SER_R	0.004276	1	0.9479
All	5.181991	3	0.1589
Variable dependiente: SER_CP			
Excluída	Chi-cuad	g de l	Prob.
SER_JF	0.160251	1	0.6889
SER_W	4.272127	1	0.0387*
SER_R	1.847269	1	0.1741
All	9.553975	3	0.0228
Variable dependiente: SER_R			
Excluída	Chi-cuad	g de l	Prob.
SER_JF	23.73153	1	0*
SER_W	20.7623	1	0*
SER_CP	0.277289	1	0.5985
All	25.62597	3	0*

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). EViews 9.

El cuadro 7 muestra que el salario (SER_W) causa en el sentido de Granger a la cantidad de jefas de familia (SER_JF), lo que implica que el aumento en los niveles salariales de las mujeres ha contribuido a que las familias se tornen monoparentales (dirigidas por mujeres), posiblemente como consecuencia de la independencia financiera femenina (rompe relaciones de subordinación) o el estrés que induce en la familia el cansancio asociado a tener dos jornadas

laborales.⁴ Del mismo modo, resultan interesantes los signos negativos del consumo y la tasa de interés a un rezago sobre el porcentaje de jefas de familia (en el momento de la transición de los cambios en ambas variables). También se hacen notar los signos esperados para el consumo respecto al ingreso (positivo) y tasa de interés (negativo) en el primer rezago.

Del estudio de causalidad también se desprende la dependencia en el sentido de Granger de la tasa de interés sobre el número de hogares dirigidos por mujeres. Esta evidencia aunado a la significancia de las variables de consumo y del salario (rezagados dos periodos son positivos) abonan a la hipótesis de hábito de consumo e inversión de esta investigación. También llama la atención la causalidad de dos vías en el sentido de Granger del consumo promedio y el salario, sobre todo cuando se toma en cuenta que existen relaciones de cointegración en el estudio que involucran tanto al porcentaje de madres de familia que son jefas de hogares como al salario y al consumo promedio. Estas relaciones se muestran en el cuadro 8.

Cuadro 8. *Modelo de cointegración (VEC) para el sistema propuesto.*

Estimadores del modelo VEC			
Muestra: 2009M09 2016M12			Obs: 88
Errores estándar () & estadísticos t []			
Cointegrating Eq:	CointEq1	CointEq2	
SER_JF(-1)	1	0	
SER_W(-1)	0	1	
	0.023099	0.027632	
SER_CP(-1)	-0.03236	-0.07846	
	[0.71377]	[0.35217]	
	-0.009705	-0.953648	
trend	-0.01274	-0.0309	
	[-0.76161]	[-30.8661]	
c	-44.57643	-238.6466	
Error Correction:	D(SER_JF)	D(SER_W)	D(SER_CP)
	-0.285847	-0.432956	-1.689544
CointEq1	-0.09621	-0.41396	-0.62166
	[-2.97118]	[-1.04590]	[-2.71777]

⁴ Los efectos y mecanismos de transmisión entre estas dos variables quedan como una línea de investigación futura, pues el rompimiento de la familia es uno de los grandes temas sociales en México por los devastadores efectos que esto conlleva, entre ellos el aumento de la pobreza familiar y la ruptura en la transmisión de valores con el consiguiente aumento de conductas antisociales.

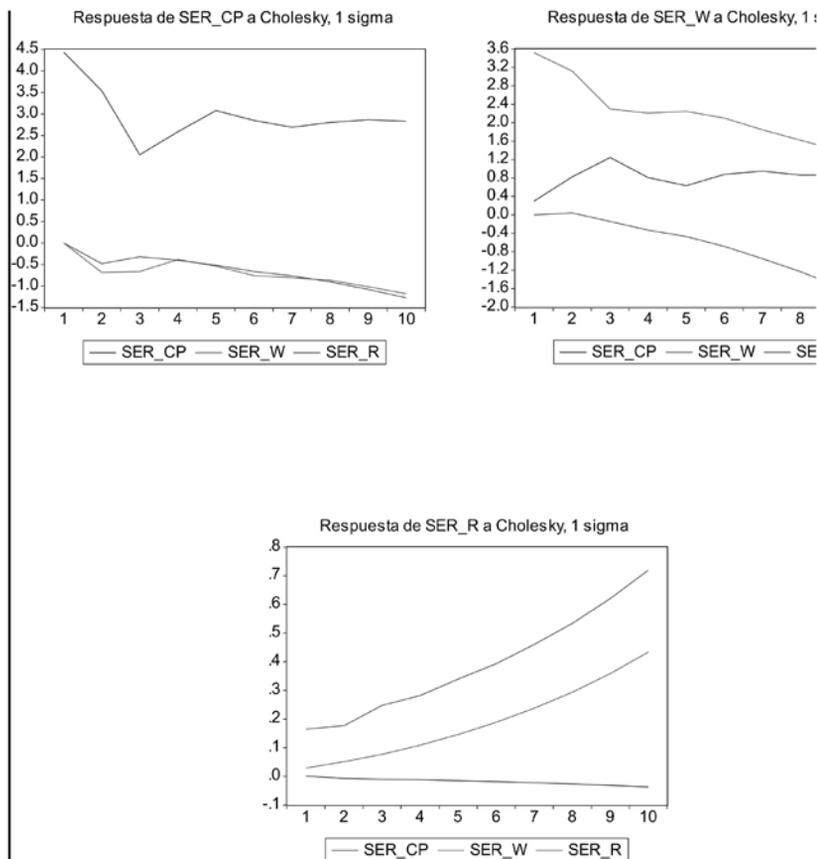
Cuadro 8. *Continuación.*

Estimadores del modelo VEC			
Muestra: 2009M09 2016M12			Obs: 88
Errores estándar () & estadísticos t []			
CointEq2	0.053931	-0.668949	-0.141773
	-0.02669	-0.11484	-0.17246
	[2.02072]	[-5.82522]	[-0.82208]
D(SER_JF(-1))	-0.112783	-0.482773	0.582306
	-0.11532	-0.4962	-0.74517
	[-0.97801]	[-0.97295]	[0.78144]
D(SER_W(-1))	-0.04262	0.246178	-0.229884
	-0.02513	-0.10815	-0.16241
	[-1.69571]	[2.27631]	[-1.41543]
D(SER_CP(-1))	-0.007891	0.119161	-0.136218
	-0.01633	-0.07027	-0.10552
	[-0.48321]	[1.69584]	[-1.29087]
c	0.328373	1.92573	1.295482
	-0.44424	-1.9115	-2.87061
	[0.73917]	[1.00745]	[0.45129]
SER_R	-0.068614	-0.286334	-0.183483
	-0.09803	-0.42182	-0.63348
	[-0.69990]	[-0.67880]	[-0.28964]
R-cuadrada	0.238021	0.372305	0.135684
Log verosimil	-89.79131	-218.2068	-253.991
Akaike AIC	2.199803	5.118335	5.931614
Desv. Est. Dep	0.773407	3.66654	4.692406

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). *EViews* 9.

Con base en el modelo de cointegración se muestran las funciones de impulso-respuesta del sistema cointegrado. Es importante destacar que la determinación de dichas funciones a partir del modelo Toda-Yamamoto implica usar alguna(s) variable(s) con raíz unitaria, lo cual puede conducir a un sistema con dinámicas complejas como se muestra en la gráfica 1. Observe que los movimientos en la tasa interés y en el salario afectan al consumo en corto plazo pero en largo plazo el efecto se diluye lo cual es consistente con la hipótesis de hábito.

Gráfica 1. Funciones de impulso-respuesta del sistema cointegrado.



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI, STPS, BANXICO y ENOE (2016). EViews 9.

Por último, se destacan las relaciones de largo plazo establecidas en el modelo de cointegración sugerido por la metodología de Toda-Yamamoto (1995), las cuales son altamente significativas y muestran que la relación entre las tasas de interés (variable exógena al modelo), el salario y el porcentaje de jefas de familia están relacionadas en el largo plazo (son las variables cointegradas). El modelo de cointegración también muestra que la variable de consumo actúa como eje de los vectores de corrección de error, lo cual coincide con las predicciones del modelo teórico. Toda esta evidencia empírica refuerza la hipótesis planteada en este trabajo.

CONCLUSIONES

En este estudio se desarrolló un modelo estocástico sobre el comportamiento de la jefa de familia como único participante en el ingreso familiar, la cual se comporta como una agente racional que toma decisiones de consumo de subsistencia y ahorro cuando hay un excedente. Es fundamental señalar que el concepto de formación de hábitos adquiere relevancia dentro de este desarrollo porque es parte sustancial en la toma de decisiones de la jefa de familia ya que su consumo pasado sí influye en su consumo futuro.

En este caso el hábito es menor al consumo actual para así asegurar que el consumo de subsistencia sea positivo. Asimismo, se encontró que la estrategia de consumo óptima es parte importante en la decisión de la jefa de familia en su consumo y que dicha estrategia consiste en mantener una propensión (al consumo) constante en el tiempo para hacerle frente a la incertidumbre futura.

Para robustecer los hallazgos teóricos en relación con la jefa de familia mexicana se realizó un análisis econométrico donde se encuentra evidencia empírica de que el ingreso causa en el sentido de Granger un aumento en el porcentaje de jefas de familia (se suponen razones culturales o de estrés), además se muestra que hay una relación bidireccional entre el consumo y el salario. En este sentido y debido a que, generalmente, los agentes económicos no consumen por completo su ingreso, sino que destinan una parte al ahorro para el consumo posterior se incluyó la tasa de interés como variable del modelo (sus rezagos a dos variables son exógenos), también se mostró la importancia del segundo rezago en el consumo como parte de la evidencia empírica respecto al consumo relacionado al hábito.

Por último, el modelo se puede extender incluyendo saltos bruscos e inesperados, hacia arriba o hacia abajo, en el ingreso de la madre y cambios de régimen en la volatilidad del ingreso (dos regímenes: volatilidad alta y baja) de la madre como en Venegas-Martínez (2001), (2006), (2009) y Vallejo-Jiménez *et al.* (2015). Asimismo, en las actividades futuras de investigación se considerará al conjunto de los jefes de familia (padres y madres) en la participación del ingreso familiar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abel, Andrew B. (1990), "Asset Prices under Habit Formation and Catching up with the Joneses", *The American Economic Review*, vol. 80, núm. 2, pp. 38-42.
- Blanco, Mercedes (2002), "Trabajo y familia: entrelazamiento de trayectorias vitales", *Estudios Demográficos y Urbanos*, vol. 17, núm. 3, pp. 447-483.
- Bodie, Zvi; Detemple, Jerome B.; Otruba, Susanne y Walter, Stephan (2004), "Optimal Consumption-Portfolio Choices and Retirement Planning", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28 (6), pp. 1115-1148.
- Breeden, Douglas T. (1986), "Consumption, Production, Inflation and Interest Rates: a Synthesis", *Journal of Financial Economics*, vol. 16, núm. 1, pp. 3-39.
- Campbell, John y Cochrane, John (1999), "By Force of Habit: A Consumption Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior", *The Journal of Political Economy*, vol. 107 núm. 2, pp. 205-251.
- Chapman, David A. (1998), "Habit Formation and Aggregate Consumption", *Econometrica*, vol. 66, núm. 5, pp. 1223-1230.
- Constantinides, Georges M. (1990), "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle", *Journal of Political Economy*, vol. 98, núm. 3, pp. 519-543.
- Cox, John C. y Huang, Chi-fu (1989), "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process", *Journal of Economic Theory*, vol. 89, núm. 1, pp. 33-83.
- Detemple, Jerome y Zapatero, Fernando (1991), "Asset Prices in an Exchange Economy with Habit Formation", *Econometrica*, vol. 59, núm. 6, pp. 1633-1657.
- García, Brígida y Rojas, Olga (2002), "Los hogares latinoamericanos durante la segunda mitad del siglo xx: una perspectiva sociodemográfica", *Estudios Demográficos y Urbanos*, núm. 50, pp. 261-288.
- Hall, Robert E. (1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence", *Journal of Political Economic*, vol. 86, núm. 6, pp. 971-987.
- (1988), "Intertemporal Substitution in Consumption", *The Journal of Political Economy*, vol. 96, núm. 2, pp. 339-357.
- Hansen, Lars y Singleton, Kenneth (1983), "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns", *Journal of Political Economy*, vol. 91, núm. 2, pp. 249-265.
- Hey, John y Valentino, Dardanoni (1988), "Optimal Consumption under Uncertainty: An Experimental Investigation", *The Economic Journal*, vol. 98, núm. 390, pp. 105-116.
- Hicks, John (1965), *Capital and growth*, Oxford University Press, Nueva York.
- Márquez de la Cruz, Elena (2006), "Consumo duradero, hábitos y mercados de valores", *Revista Economía Aplicada*, vol. 16, núm. 42, pp. 5-33.

- Merton, Robert Cox (1969), “Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time”, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 51, núm. 3, pp. 247-257.
- (1971), “Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model”, *Journal of Economic Theory*, vol. 3, pp. 373-413.
- Miller, Bruce L. (1974), “Optimal Consumption with a Stochastic Income Stream”, *Econometrica*, vol. 42, núm. 2, pp. 253-266.
- Oliveira, Orlandina de y Ariza, Marina (2001), “Transiciones familiares y trayectorias laborales femeninas en el México urbano”, en Gomes, Cristina (comp.), *Procesos sociales, población y familia. Alternativas teóricas y empíricas en las investigaciones sobre vida doméstica*, Flacso/Miguel Ángel Porrúa, México, pp. 229-366.
- Oliveira, Orlandina de y García, Brígida (1990) “Trabajo, fecundidad y condición femenina en México”, *Estudios Demográficos y Urbanos*, vol. 5, núm. 3, pp. 693-710.
- Pollak, Robert A. (1970), “Habit Formation and Dynamic Demand Function”, *Journal of Political Economy*, vol. 78, núm. 4, pp. 745-763.
- Ryder, Harl E. y Heal, Geoffrey (1973), “Optimal Growth with Intertemporally Dependent Preferences”, *Review of Economic Studies*, vol. 40, núm. 1, pp. 1-33.
- Sundaresan, Suresh M. (1989), “Intertemporally Dependent Preferences and the Volatility of Consumption and Wealth”, *Review of Financial Studies*, vol. 2, núm.1, pp. 73-89.
- Toda, Hiro Y. y Yamamoto, Taku (1995) “Statistical inferences in vector autoregressions with possibly integrated processes”, *Journal of Econometrics*, vol. 66, núm. 2, pp. 225-250.
- Vallejo-Jiménez, Benjamín; Venegas-Martínez, Francisco y Soriano-Morales, Yazmín Viridiana (2015), “Optimal Consumption and Portfolio Decisions when the Risky Asset is Driven by a Time-Inhomogeneous Markov Modulated Diffusion Process”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 104, núm. 2, pp. 353-362.
- Venegas-Martínez, Francisco y González-Aréchiga, Bernardo (2000), “Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano”, *Momento Económico*, núm. 111, pp. 20-27.
- Venegas-Martínez, Francisco (2001), “Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO”, *Estudios Económicos*, vol. 16, núm. 32, pp. 203-226.
- (2001), “Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, núm. 9, pp. 1429-1449.
- (2006), “Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks”, *Economic Modelling*, vol. 23, núm. 1, pp. 157-173.

- (2008), *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, 2a. ed., Cengage Learning, México.
- (2009), “Temporary Stabilization in Developing Countries and Real Options on Consumption”, *International Journal of Economic Research*, vol. 6, núm. 2, pp. 237-257.
- Zheng-yan, Xiao y Xu Xu-song (2003), “Optimal Portfolio Rules with Habit Formation and Preference for Wealth”, *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, vol. 8, núm. 4, pp. 1057-1060.

APÉNDICE A. DINÁMICA DE FORMACIÓN DE HÁBITOS

La dinámica de formación de hábitos se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\gamma_t &= bc_t + (1-a)\gamma_{t-1} \\ \gamma_t - \gamma_{t-\Delta} &= bc_t\Delta - a\gamma_t\Delta \\ \frac{\gamma_t - \gamma_{t-\Delta}}{\Delta} &= bc_t - a\gamma_t\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = bc_t - a\gamma_t$$

donde:

c_t : es el consumo hoy.

γ_t : es la formación del hábito hoy.

γ_{t-1} : es la formación del hábito asociado al consumo pasado.

APÉNDICE B. LEMA DE ITÔ EN DOS VARIABLES

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas dadas por

$$\begin{cases} dS_{1t} = \mu_1(S_{1t}, t) dt + \sigma_1(S_{1t}, t) dW_{1t} \\ dS_{2t} = \mu_2(S_{2t}, t) dt + \sigma_2(S_{2t}, t) dW_{2t} \end{cases} \quad (B1)$$

donde

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt \tag{B2}$$

Si se define la función $y=f(S_{1t}, S_{2t}, t)$, la expansión de serie de Taylor de esta ecuación en términos de segundo orden es

$$dy = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}} dS_{1t} + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}} dS_{2t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}^2} (dS_{1t})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2} (dS_{2t})^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t} \partial t} dS_{1t} dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t} \partial t} dS_{2t} dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} dS_{1t} dS_{2t} \right) \right] \tag{B3}$$

Después de sustituir la ecuación (A1) y aplicar las reglas básicas de diferenciación estocástica $(dt)^2=0$, $(dt)(dW_t)=0$ y $(dW_t)^2 = dt$, se llega a lo que se conoce como el Lema de Itô para dos variables:

$$dy = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}} \mu_1(S_{1t}, t) + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}} \mu_2(S_{2t}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}^2} \sigma_1^2(S_{1t}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2} \sigma_2^2(S_{2t}, t) + \frac{\partial f}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} \rho \sigma_1(S_{1t}, t) \sigma_2(S_{2t}, t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}} \sigma_1(S_{1t}, t) dW_{1t} + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}} \sigma_2(S_{2t}, t) dW_{2t} \tag{B4}$$

APÉNDICE C. CÁLCULO DE β_0 Y β_1

Si se sustituyen las ecuaciones (15) y (16) en (14), se obtienen los valores de β_0 y β_1 . En efecto,

$$0 = \frac{\left(\left[\frac{1}{\beta_1^{\lambda-1}} (W_t - \beta_0 \Psi_t) (1 + b \beta_0)^{\frac{1}{\lambda-1}} + \Psi_t \right] - \Psi_t \right)^\lambda}{\lambda} - \rho \beta_1 \frac{(W_t - \beta_0 \Psi_t)^\lambda}{\lambda} + \beta_1 (W_t - \beta_0 \Psi_t)^{\lambda-1} W_t (r + (\mu - r) \left[\frac{(\mu - r)}{\sigma_t^2 (1 - \lambda)} \frac{1}{W_t} (W_t - \beta_0 \Psi_t) \right]) + T_t - \frac{\beta_1^{\lambda-1} (W_t - \beta_0 \Psi_t) (1 + b \beta_0)^{\frac{1}{\lambda-1}} + \Psi_t}{W_t} + \frac{1}{2} \beta_1 (\lambda - 1) (W_t - \beta_0 \Psi_t)^{\lambda-2} W_t^2 \sigma^2 \left[\frac{(\mu - r)}{\sigma_t^2 (1 - \lambda)} \frac{1}{W_t} (W_t - \beta_0 \Psi_t) \right]^2 - \beta_0 \beta_1 (W_t - \beta_0 \Psi_t)^{\lambda-1} \left(\left[\frac{1}{b \beta_1^{\lambda-1}} (W_t - \beta_0 \Psi_t) (1 + b \beta_0)^{\frac{1}{\lambda-1}} + \Psi_t \right] - a \Psi_t \right)$$

Si se elimina β_1 en la expresión anterior, se obtiene

$$0 = [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}} \frac{(W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda}{\lambda} - \rho\beta_1 \frac{(W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda}{\lambda} + \beta_1(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} W_t r + \beta_1(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} W_t \left(\frac{\mu-r}{\lambda}\right) \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left[1 - \beta_0 \frac{\Psi_t}{W_t}\right]^2 \\ + \beta_1(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} T_t - \beta_1(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} \left[\Psi_t + [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}} (W_t - \beta_0\Psi_t)\right] \\ + \frac{1}{2} \beta_1(\lambda-1)(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-2} W_t^2 \sigma^2 \left[\frac{(\mu-r)}{\sigma_t^2(1-\lambda)} \frac{1}{W_t} (W_t - \beta_0\Psi_t)\right]^2 - \beta_0\beta_1(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} \left(b[\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}} [(W_t - \beta_0\Psi_t) + \Psi_t] - a\Psi_t\right)$$

Después de factorizar términos iguales, se sigue que

$$0 = [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}} \frac{(a_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda}{\lambda} - \rho \frac{(W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda}{\lambda} + (W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} W_t r + \frac{1}{2} (W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda \left(\frac{\mu-r}{\lambda}\right) \frac{1}{1-\lambda} \sigma^2 \\ + (W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} T_t - (W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda \left[\Psi_t + [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}}\right] - \beta_0\beta_1(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} (a-b)\Psi_t - [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}} (W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda$$

De esta manera,

$$0 = [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}} \frac{(W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda}{\lambda} - \rho \frac{(W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda}{\lambda} + (W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} W_t r + \frac{1}{2} (W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda \left(\frac{\mu-r}{\lambda}\right) \frac{1}{1-\lambda} \sigma^2 \\ + (W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} T_t - (W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda \left[\Psi_t + [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}}\right] - \beta_0\beta_1(W_t - \beta_0\Psi_t)^{\lambda-1} (a-b)\Psi_t - [\beta_1(1+b\beta_0)]^{\frac{1}{\lambda-1}} (W_t - \beta_0\Psi_t)^\lambda$$

Si se considera que

$$\Psi_t(1 + \beta_0(b-a)) + W_t r = -r(W_t - 1 + \beta_0(b-a)\Psi_t),$$

y que

$$\beta_0 = \frac{1 + \beta_0(b-a)}{r}.$$

Es decir,

$$\beta_0 = \frac{1}{r+a-b}.$$

Por lo tanto, se puede eliminar $(W_t - \beta_0 x_t)^\lambda$ de todos los términos y se obtiene

$$0 = \frac{\left[\beta_1 \left(1 + b \frac{1}{r+a-b} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda-1}}}{\lambda} - \frac{\rho}{\lambda} + \left(W_t - \frac{1}{r+a-b} \Psi_t \right)^{\lambda-1} (W_t r - T_t - (a-b) \Psi_t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{1-\lambda} \sigma^2 - \Psi_t$$

En consecuencia,

$$\beta_1 \left(1 + b \frac{1}{r+a-b} \right) = \left[\frac{\rho}{\lambda} + (W_t r - T_t - (a-b) \Psi_t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{1-\lambda} \sigma^2 - \Psi_t \right]^{\lambda-1}$$

Así,

$$\beta_1 = \left[\frac{1}{(1-\lambda)(r+a-b) - \lambda} \right]^{\lambda-1}.$$